

Foucault's pendulum under circular motion

D. Amat, J. Espar, P. Gurri, G. Jiménez, , J. Puig, L. Sendra

ABSTRACT

El pèndol de Foucault va ser el primer experiment no astronòmic simple que va permetre demostrar la rotació de la Terra. Des de la seva creació l'any 1851, ha esdevingut un element simbòlic en el món de la física i la ciència. En aquest experiment, s'ha introduït aquest pèndol en un sistema de referència inercial amb moviment circular uniforme. Gràcies a les seves oscil·lacions s'ha calculat quin era el radi de rotació, el període i la velocitat angular del sistema. Finalment, s'ha demostrat que les observacions empíriques coincideixen amb el càlcul analític del problema.

INTRODUCCIÓ

L'experiment va sorgir del projecte *Fisidabo* del grau d'Enginyeria Física de la UPC, el qual proporciona la possibilitat de realitzar experiments científics aprofitant les atraccions del parc Tibidabo als alumnes del grau. A través d'això, vam tenir la idea d'emprar l'esmentat pèndol situant-lo a l'interior d'una atracció giratòria: el conegut avió del Tibidabo.

Aquest aparell consta d'un avió d'uns 10 metres de longitud unit a un eix rotatori fix al terra per un braç d'un radi desconegut que el fa girar obeint un moviment circular (*Figure 1*). El nostre principal objectiu era calcular el radi de rotació, el període i la velocitat angular de l'avió. Tot això, només amb la informació obtinguda amb les oscil·lacions del pèndol.

Per a fer-ho, i garantir la fiabilitat dels resultats, vam comparar el moviment del pèndol enregistrat amb una càmera de vídeo amb les trajectòries descrites per la mecànica clàssica.

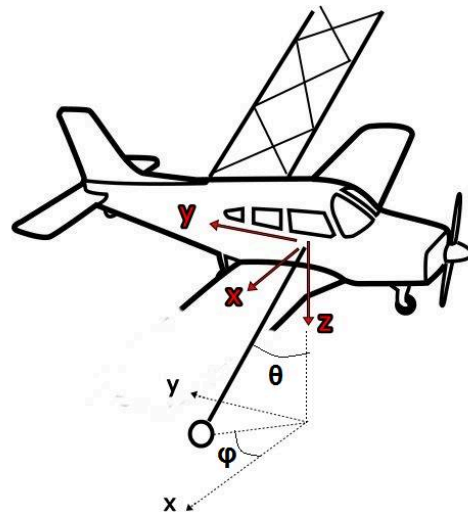


Figure 1. Avió i eixos del sistema de referència inercial.

METODOLOGIA

Descripció de l'experiment

Primerament, vam posar en marxa l'atracció i vam esperar a que l'avió accelerés fins assolir una velocitat constant. En aquest instant, es va deixar anar el pèndol sense velocitat inicial. Es va enregistrar el moviment de la massa ficant una càmera just a l'eix del pèndol i del nostre sistema de referència no inercial, gravant les oscil·lacions des del terra de l'avió, i també substituint la massa per una bureta plena de pintura, per poder enregistrar el rastre de les trajectòries en deixar-la caure.

Descripció del treball teòric

Amb l'objectiu d'obtenir les equacions del moviment, el que vam fer primerament va ser obtenir el lagrangiana del pèndol de Foucault. Per a fer-ho, hem considerat els angles i el sistema de referència que es presenten a la *Figura 1*. Sabent que el lagrangiana es defineix com la suma de l'energia cinètica més la potencial, tenim:

$$\mathcal{L} = T + V \quad (1)$$

on T és l'energia cinètica i V l'energia potencial. En el nostre cas particular són:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta} + \dot{\phi} \sin^2 \theta) + m\omega l^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta + m\omega^2 Rl \sin \theta \cos \phi + \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2 \theta \quad (2)$$

$$V = mgl \cos \theta \quad (3)$$

i d'aquesta manera el lagrangiana del pèndol de Foucault sotmès a moviment circular és

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta} + \dot{\phi} \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta - m\omega l^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta + m\omega^2 Rl \sin \theta \cos \phi + \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2 \theta \quad (4)$$

A partir de (4) podem obtenir les equacions del moviment fent servir les conegudes equacions d'Euler-Lagrange, que es defineixen com:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (6)$$

D'aquesta manera, i sense considerar fregament, obtenim les dues equacions del moviment

$$\ddot{\theta} = (\dot{\phi} - \omega)^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{\omega^2 R}{l} \cos \theta \cos \phi \quad (7)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{\omega^2 R \sin \phi}{l \sin \theta} - 2\dot{\theta}(\dot{\phi} - \omega) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (8)$$

A l'estudiar detalladament (7) i (8) es pot observar que existeix una singularitat per l'angle θ que fa que el $\sin \theta$ sigui igual a zero, ja que per aquests valors obtindríem una acceleració de ϕ infinita. Menyspreant les condicions sense sentit físic ($\theta = 180^\circ$) vam arribar a la conclusió que aquesta situació només es dona per θ nul·la, és a dir, quan el pèndol és totalment perpendicular al terra de l'avió -que no és el mateix que el pèndol estigui en repòs degut a l'acceleració centrífuga de l'avió-.

Coneixent que aquesta singularitat és deguda al sistema de referència escollit i no al problema físic en si, vam decidir estudiar les magnituds conservades que presenta el nostre cas particular. Seguint una metodologia típica com la descrita en el llibre *Introducció a la mecànica de Lagrange y Hamilton* per T. Soldovieri vam trobar que tant els moments angulars $L(\theta)$ i $L(\phi)$ com el hamiltonià (\mathcal{H}) són magnituds conservades si considerem el fregament nul. Vam decidir doncs utilitzar la conservació del hamiltonià per tractar numèricament la nostra singularitat.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) - mgl \cos \theta - m\omega^2 Rl \sin \theta \cos \phi - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\theta \quad (9)$$

El fet que el Hamiltonià sigui una magnitud conservada implica que per a qualsevol punt de la trajectòria del pèndol aquest tindrà el mateix valor constant. Per altre banda, cada cop que el nostre pèndol s'apropava a la singularitat numèrica consideràvem que descrivia un moviment molt semblant al descrit per un pèndol sotmès a petites oscil·lacions. Mitjançant les equacions del moviment, podem conèixer el valor dels angles i les velocitats angulars en un punt previ a la singularitat i en un punt posterior a ella. Així doncs, coneixent els valors previs i posteriors dels angles i velocitats angulars de la mateixa forma que el valor constant del hamiltonià podem aproximar numèricament els valors de les velocitats angulars fent que el Hamiltonià tingui en tot moment el mateix valor. No és necessari aproximar els valors dels angles ja que els coneixem (θ serà nul i ϕ serà en aquest cas indiferent degut a la simetria esfèrica).

En la pràctica no sa ver necessari aplicar aquesta aproximació ja que en el nostre cas el pèndol no va estar en cap moment perpendicular al terra, però es un cas perfectament possible en repeticions de l'experiment o altres simulacions i per això hem considerat aquesta explicació necessària.

D'aquesta manera, a la *Figura 2* podem veure la posició de la massa del pèndol en funció del temps. Veiem com la posició calculada via teòrica amb el procediment explicat anteriorment és molt similar a la que en resulta d'interpol·lar amb Fourier les dades enregistrades per la càmera situada sota del pèndol.

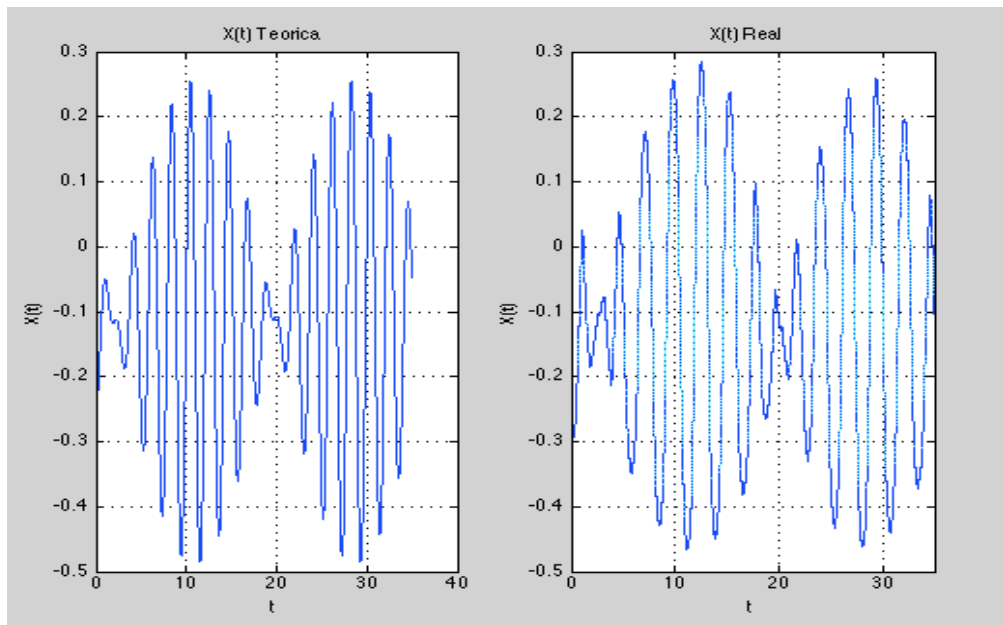


Figura 2. A l'esquerra, posició en funció del temps de la massa del pèndol. A la dreta, posició resultant d'interpol·lar amb Fourier les dades experimentals, degut a la periodicitat d'aquestes.
Nota: El gradient de colors al gràfic de la dreta indica la quantitat de temps que la massa està a una determinada posició, sent aquest major si el color és més fosc.

A la *Figura 3* es mostra la projecció de la posició en el pla X-Y tan la teòrica com la real. Podem veure com el nombre de posicions extremals (pics) són els mateixos i que, per tant, s'ajusta de nou satisfactòriament la teoria amb la realitat, i viceversa.

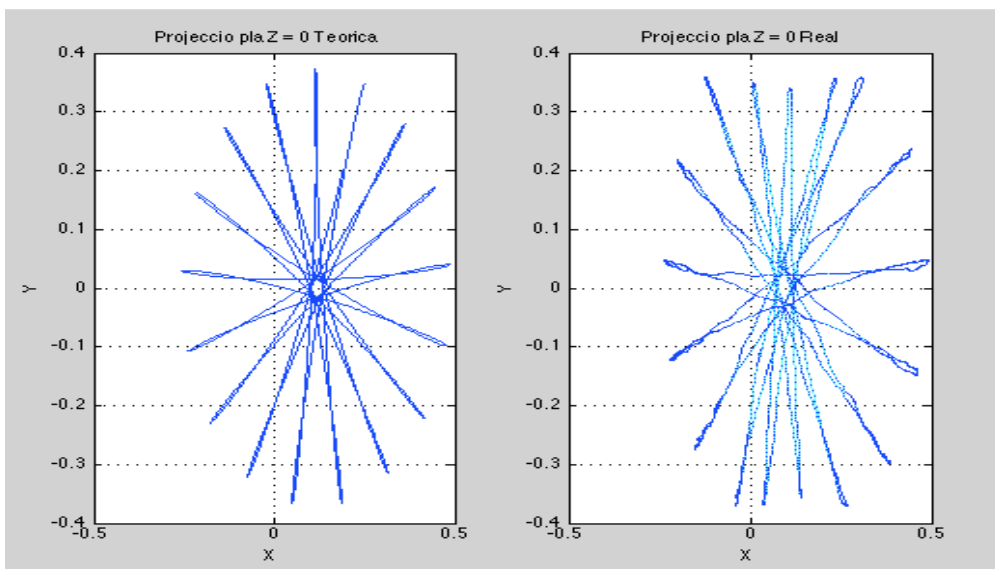


Figura 3. A l'esquerra, projecció de la posició en el pla $z=0$ emprant els resultats teòrics. A la dreta, la projecció obtinguda d'emprar interpolació de Fourier. Sobre les dades experimentals obtingudes.
Nota: El gradient de colors al gràfic de la dreta indica la quantitat de temps que la massa està a una determinada posició, sent aquest major si el color és més fosc.

A la *Figura 4* veiem una representació 3-D de la posició de la massa del pèndol, emprant els resultats teòrics obtinguts. Podem denotar com adquireix una alçada major d'un costat que de l'altre, degut a la rotació de l'avió i a la conseqüent acceleració centrífuga. Aquest fet s'observa amb més claredat a la *Figura 5*, on es representa l'increment d'alçada amb un gradient de color, on el color lila simbolitza els punts més alts.

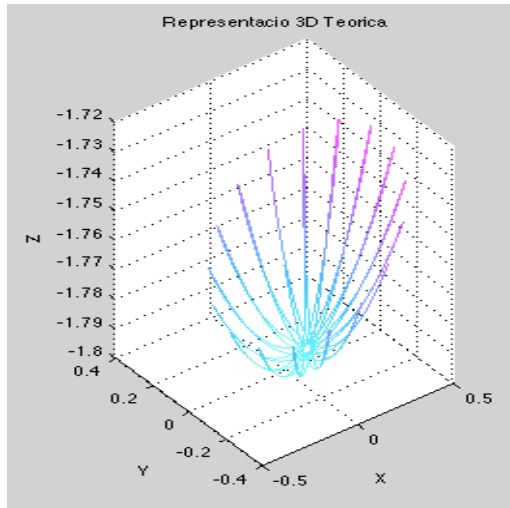


Figura 4. Representació 3-D de la posició de la massa del pèndol

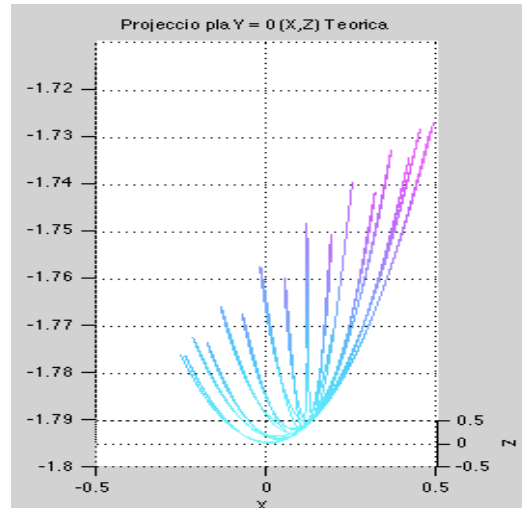


Figura 5. Projectió de la posició de la massa del pèndol sobre el pla X-Z.

A la *Figura 6* veiem una demostració d'altres comportaments que podria adoptar el pèndol i que també es podrien estudiar, de caire més extrem o fins i tot caòtic. En aquest cas, simulem el moviment del pèndol anteriorment descrit, però amb velocitat angular inicial oposada a la rotació de l'avió.

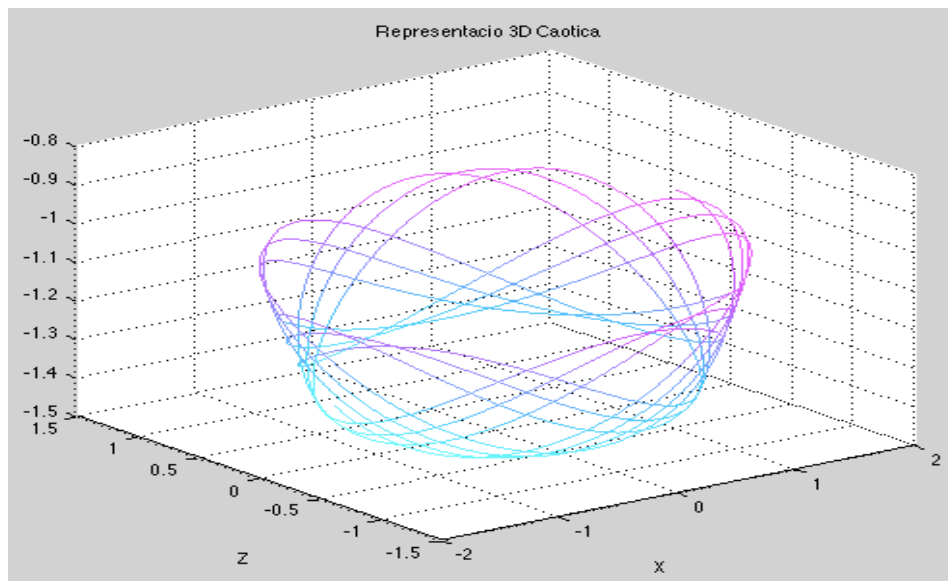


Figura 6. Representació en 3D del pèndol amb velocitat angular inicial oposada a la rotació del sistema de referència inercial.

Conclusions

En aquest experiment hem demostrat que la mera observació de les oscil·lacions d'un pèndol en les *condicions anteriorment descrites (sense fregament.....)* és suficient per determinar dades com el període de rotació, la velocitat angular i el radi de rotació del sistema de referència inercial –l'avió del Tibidabo-. Concretament, s'han utilitzat el període de rotació del pèndol (que coincideix amb el de l'avió) i els punts d'equilibri del sistema com a dades experimentals, corroborats a partir de l'anàlisi teòric del sistema, per calcular aquestes esmentades magnituds. A més, han resultat coincidir amb les reals que caracteritzen aquesta atracció del parc Tibidabo.

Queda demostrat, doncs, que un pèndol de Foucault dins un sistema en moviment és suficient per determinar el moviment d'aquest sense necessitat d'una perspectiva global.